

文章编号: 1673-3363-(2013)04-0589-06

# 基于双重介质力学耦合相关的沉陷模型研究

顾伟, 谭志祥, 邓喀中

(中国矿业大学江苏省资源环境信息工程重点实验室, 环境与测绘学院, 江苏 徐州 221116)

**摘要** 在对基岩破坏状态的移动形式进行分析的基础上, 基于材料力学和开采沉陷学等相关理论分别建立不同的沉陷模型并推导了开采影响下岩体的移动和变形计算公式, 再通过相关耦合2种介质模型, 形成了双重介质下沉空间逐层传递的开采沉陷模型, 同时编制了相应的计算及可视化程序。该模型不仅能够计算岩层及地表移动变形, 而且能够分析计算岩层的破坏状态和断裂高度。经实测资料证明了模型的正确性和可靠性。

**关键词** 开采沉陷; 双重介质; 力学模型; 概率积分法

**中图分类号** TD 325

**文献标志码** A

## Study on subsidence model based on double-medium mechanics coupling

GU Wei, TAN Zhi-xiang, DENG Ka-zhong

(Jiangsu Key Laboratory of Resources and Environmental Information Engineering, School of Environment Science and Spatial Informatics, China University of Mining & Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China)

**Abstract** Based on the analysis of the moving forms of rock damage state, different subsidence models are built respectively according to the relative theories of mechanics of materials and mining subsidence, and the calculation formula of rock movement and deformation under the mining are derived in this dissertation. Through the two medium models of the relevant coupling, this research forms a mining subsidence model of double-medium subsidence space layered transmission. Meanwhile, the corresponding calculation and visualization program are also designed in this study. This model can not only calculate rock and surface subsidence, but also analyze and calculate the damage state and fracture height of rock. The model has been proved valid and reliable by comparison with experimental data.

**Key words** mining subsidence; double-medium; mechanical model; probability integral method

在煤层开采实际过程中, 覆岩层和地表松散层由于不同的移动机理, 使得传统基于单一介质理论的开采沉陷模型的适用范围受到极大限制, 尤其是在大采深和特殊地质结构中, 现有的预测模型和实际情况存在较大误差。而且现有模型中没有考虑工作面距离及岩层厚度的不同, 对岩体破坏的形式及

其产生对地表的影响也不同这一现象, 使得进行岩层及地表移动预测时存在较大的误差, 尽管根据实测资料对此进行了大量的模型修正研究, 但没有从模型建立的本身和工程机理上取得突破。本文采用材料力学模型和随机介质模型相结合, 建立了双重介质模型, 分别将覆岩和松散层看做连续介质和非

收稿日期: 2012-02-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(41071273)

作者简介: 顾伟(1980-), 男, 江苏省东海县人, 讲师, 博士, 从事矿山开采沉陷、岩层控制与数字矿山方面的研究。

通信作者: 谭志祥

E-mail: tan7654321@sina.com

Tel: 13615106793

连续介质,采用耦合相关计算,使得模型更符合实际,提高了预计精度。

## 1 移动分析及模型假设

随着开采沉陷学的研究不断深入,传统的将上覆岩土层视为单一介质(连续介质或非连续介质)的开采沉陷预计模型已不适用。应将基岩和松散层视为 2 种不同的介质类型,并对其不同移动形式的变形情况进行分析。

### 1.1 覆岩移动形式

根据现场和相似材料实验研究表明,在采空区上覆岩层移动的整个过程中,存在岩层的垮落、岩层的断裂、岩层的弯曲 3 种岩层移动形式。具体分析如下:

1) 当煤层采出后,直接顶板产生拉伸变形,当变形超过岩石的允许抗拉强度时,直接顶板及其上部的部分岩层破碎成大小不一的岩块,无规律地充填采空区。此时采空区存在 2 种状态,一是垮落岩石充满采空区,另一是垮落岩石不足以充满采空区。

2) 当垮落岩层上部的岩体不足以支撑上覆应力,岩梁产生裂缝或者断裂,但仍然保持原有的层状结构,具有一定承载能力,可看成砌体梁的弯曲。

3) 在破裂区上部岩梁(关键层)能够支撑上覆应力,但产生弯曲变形,岩层可能存在数量不多的微小裂缝,基本上保持连续性和层状结构,形成简支梁或者悬臂梁的弯曲。

### 1.2 松散层表土移动形式

松散层表土在开采沉陷过程中与基岩的下沉形式完全不同,土是由三相物质组成的碎散颗粒集合体,属于非连续介质<sup>[1]</sup>。

1) 土体内颗粒之间的拉应力和黏聚力很小,在整个开采移动变形过程中,介质单元之间的连续性受到破坏,原有的联系关系发生变化,单元相互分离并发生相对运动。

2) 颗粒介质在重力作用下,不受其尺寸大小、成层的几何形状的影响而仅受随机规律支配,在整个开采过程中上层土体颗粒会落下来填充下面的空洞,并重复循环到地表,形成下沉盆地。

3) 开采引起的沉陷在松散层中以充填地下开采引起的岩层下沉空间的方式传播。这种沉降过程可以看做是大量单元空洞从地层深处向地面移动的过程,地表下沉盆地的形态与正态的概率分布密度曲线较为相似。

### 1.3 模型基本假设

根据岩体特性和采矿实际情况,作如下假定:

1) 由于岩体为弹脆性体,因而在岩体出现裂隙前,岩体的移动变形可采用弹性理论求解。

2) 开采在一个方向上已达到足够宽度,覆岩在另一方向上的移动可看成梁的弯曲,可采用梁理论求解。

3) 覆岩移动受刚度大的岩层移动控制,岩层移动可看成是组合岩梁的移动,地表下沉是表土层与覆岩关键层运动的耦合结果。

4) 开采引起的松散层移动规律符合随机介质的颗粒介质模型规律,其移动规律可以用概率积分法模型进行研究。

5) 弹性地基符合 Winkler 地基模型假定,即弹性地基每单位面积上所受的压力与相应的地基沉降量成正比。

根据上述分析,岩层移动形式随着岩梁介质属性在不断变化,由连续介质(出现裂隙前)、拟连续介质(出现裂隙后)、非连续介质(断裂后)到碎裂或块裂介质(垮落后)。而松散层表土的移动变形也随着岩层的移动形式而改变。由于岩体移动破坏的复杂性,岩体移动不能采用单一的岩梁模型,必须针对不同情况寻求不同的模型,最终将这些模型联系起来成为计算岩层及地表移动的完整模型。

## 2 双重介质耦合模型建立

### 2.1 岩层连续介质变形力学模型

当有用矿物被采出后,上部岩层发生破坏,由于工作面的长度和岩层的性质及厚度不同,会出现 2 种形式的变形:1) 顶板岩层垮落(或未垮落),未垮落的岩层(关键层)支撑整个上部荷载,发生变形,可认为是两边位于弹性基础上的梁弯曲(简支梁),此时基岩顶部的下沉可看成是梁弯曲的挠度;2) 岩层破断,顶板部分以无规则形式破碎,关键层产生裂断以砌体梁形式存在,而当关键层失稳,岩层全部垮落,则基岩顶部的下沉可认为是砌体梁或岩石垮落下沉。

#### 2.1.1 弹性基础上的梁弯曲沉陷模型

顶板岩体垮落后会出现 2 种情况:

1) 垮落岩体未充满采空区,岩梁形成中间悬空两边位于弹性基础上的简支梁弯曲;

2) 垮落岩体充满采空区,岩梁中部与垮落岩体接触,可以看成弹性基础上的梁弯曲。如图 1 所示。

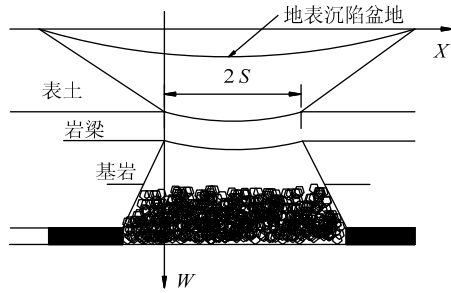


图1 弹性地基梁模型简图

Fig.1 The model sketch of beam on elastic foundation

开采沉陷模型如下<sup>[2-4]</sup>, 岩梁扰曲线的一般方程为:

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 Z_1}{dx^4} = q - \varphi_1 \\ EI \frac{d^4 Z_1}{dx^4} = q - \varphi_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$S = L - h \tan \psi \quad (2)$$

式中:  $E$  为岩梁的弹性模量;  $I$  为惯性矩;  $Z_1$  为岩梁的挠度;  $q$  为作用在梁上的应力;  $S$  为简支梁半长;  $L$  为工作面半长;  $h$  为垮落岩体的高度;  $\varphi_1$  为垮落岩体的地基反力;  $\varphi_2$  为岩梁支撑部分的地基反力;  $\psi$  为垮落范围角。

当垮落岩体未充满采空区时,  $\varphi_1=0$ 。当垮落岩体已经充满采空区时, 假定符合 Winkler 地基假设:

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0, & h \leq \frac{m}{k-1} \\ k_1 z, & h \geq \frac{m}{k-1} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $m$  为开采厚度;  $k$  为岩体的碎胀系数;  $k_1$  为垮落岩体的地基系数。

$$K_1 = \frac{E'}{EI}$$

$$E' = \frac{\sum_{i=1}^n h_i E_i + \sum_{j=1}^m h_j E_j}{\sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^m h_j}$$

式中:  $i, j$  分别为底板及顶板受影响的岩层数。

边界条件规定如下:

当  $x=0$  时,  $\frac{dZ}{dx} = 0, \frac{d^3 Z}{dx^3} = 0$ ; 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $Z=0$ 。

根据以上的模型, 分别对 2 种情况进行求解(以岩梁边界为  $x=0$  点, 采空区为正, 煤柱为负), 以下给出了垮落岩石未充满采空区时的岩层下沉计算及岩梁破断分析:

### 1) 下沉计算

$$W(x) = \frac{qx^4}{24EI} + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 2s)$$

$$W(x) = e^{Ax} (c_1 \sin Ax + c_2 \cos Ax) \quad (5)$$

$$(-\infty \leq x \leq 0)$$

$$W(x) = e^{A(x-2s)} [-c_1 \sin A(x-2s) + c_2 \cos A(x-2s)] \quad (6)$$

$$(2s \leq x \leq \infty)$$

式中:  $A = \sqrt[4]{\frac{3E}{E'h'^2(m+h)}}$ ,  $a_1 = \frac{qs}{6}$ ,

$$a_2 = -\frac{qs}{12A(sA+1)}(2s^2 A^2 - 3),$$

$$a_3 = \frac{qs^2}{6A(sA+1)}(2sA+3),$$

$$a_4 = -\frac{qs}{12A^3(sA+1)}(2s^2 A^2 + 6sA+3),$$

$$c_1 = \frac{qs}{12A^3(sA+1)}(2s^2 A^2 - 3),$$

$$c_2 = \frac{qs}{12A^3(sA+1)}(2s^2 A^2 + 6sA+3)。$$

### 2) 岩梁破断分析

#### ① 拉伸破坏分析

拉应力最大值位置:

$$x_{\sigma_{m1}} = s, x_{\sigma_{m2}} = \frac{1}{A} \cot \frac{3sA+3}{3sA-2s^2 A^2} \quad (7)$$

当  $\frac{E'h'qs}{12A(sA-1)}(s^2 A^2 - 3sA+3) > [\sigma_t]$  时, 岩梁在

$x_{\sigma_{m1}}$  处拉断;

当  $\frac{qE'h'se^{-Ax_{\sigma_{m2}}}}{12A(sA-1)}[(2s^2 A^2 - 3)\cos Ax_{\sigma_{m2}} + (2s^2 A^2 - 6sA+3)\sin Ax_{\sigma_{m2}}] > [\sigma_t]$  时, 岩梁在  $x_{\sigma_{m2}}$  处被拉破坏。

#### ② 剪切破坏分析

剪应力最大值位置:

$$x_{Q_{m1}} = 0, x_{Q_{m2}} = \frac{1}{A} \cot \frac{2s^2 A^2 - 6sA+3}{2s^2 A^2 - 3} \quad (8)$$

当最大剪应力  $\tau_{\max} = \frac{3E'I'qs}{2h'} > [\tau]$  时, 岩梁在

$x_{Q_{m1}}$  处剪切破坏;

当最大剪应力  $\tau_{\max} = \frac{qE'I'se^{-Ax_{Q_{m2}}}}{2\sqrt{2}(sA-1)h'}$ 。

$\sqrt{4s^4 A^4 - 12s^3 A^3 + 18s^2 A^2 - 18sA+9} > [\tau]$  时, 岩梁在  $x_{Q_{m2}}$  处剪切破坏。

### 2.1.2 砌体梁沉陷模型

当煤层上部基岩较薄或者较脆弱时, 岩体全部断裂破碎, 存在 2 种情况:

1) 岩体全部垮落断裂(即无关键层), 以无序的形式垮落;

2) 煤层顶板部分(关键层以下)以无序形式垮落, 而顶板上部(关键层)以“砌体梁”结构形式垮落。

以上 2 种形式的区别就在于关键层是否失稳, 如果失稳, 则全部垮落, 不失稳则产生相对较为稳定的“砌体梁”结构。由钱鸣高院士等提出的“砌体梁”的“S-R”稳定理论<sup>[5-6]</sup>, 根据对此结构的分析及生产实际情况的反映, 此结构有 2 种失稳形式: 滑落失稳及转动变形失稳。

开采沉陷模型如下:

1) 基岩全部破碎、无序垮落, 基岩面的下沉量:

$$Z_2 = m - h(k-1) \quad (9)$$

式中:  $Z_2$  为基岩面的下沉;  $m$  为开采厚度;  $h$  为基岩厚度(垮落岩体高度);  $k$  为岩体的碎胀系数。

2) 基岩全部断裂、顶板无序垮落, 而上部基岩以砌体梁形式存在

关键层破断后的断裂块体若能满足“砌体梁”结构的“S-R”稳定条件, 则将在垮落区域上部形成稳定的“砌体梁”结构。关键层破断后形成的“砌体梁”结构的位移曲线直接影响着其上覆表土下沉曲线形态特征。许家林教授就关键层断块长度对其位移曲线形态的影响进行了研究<sup>[7]</sup>, 提出了“砌体梁”结构位移曲线的拟合方程:

$$Z_3 = \begin{cases} Z_0 \left[ 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{x-0.5l}{a}}} \right], & -1 \leq x \leq 2l \\ Z_0, & 2l \leq x \leq 2s-2l \\ Z_0 \left[ 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{(2s-x)-0.5l}{a}}} \right], & 2s-2l \leq x \leq 2s+l \end{cases} \quad (10)$$

$$Z_0 = m - h(k_p - 1) \quad (11)$$

式中:  $Z_3$  为“砌体梁”的位移;  $Z_0$  为“砌体梁”下沉稳定后的最大下沉量;  $m$  为开采厚度;  $h$  为关键层到煤层顶板的距离;  $k_p$  为关键层以下岩层的残余碎胀系数;  $x$  为距开采边界的距离, 煤体侧为负, 采空侧为正;  $l$  为砌体梁块体长度;  $a$  为与砌体梁块度及煤体刚度有关的系数, 根据离散元模拟结果,  $a$  一般可取为  $0.25l$ 。

### 2.2 松散层非连续介质力学模型

基于随机介质理论的概率积分法是我国开采

沉陷预计中较为成熟、应用最为广泛的预计方法, 也是“三下采煤规程”规定的开采沉陷预计方法之一。理论和实验证明, 松散层下沉规律和随机介质模型移动规律具有宏观上的相似性。因此随机介质模型适用于松散层沉陷模型<sup>[8-14]</sup>。

根据概率积分法的预计模型<sup>[15]</sup>:

$$W(x) = W_0 \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-\frac{\pi(x-s)^2}{r^2}} ds = \frac{W_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{r} x \right) + 1 \right] \quad (12)$$

式中  $W_0$  为最大下沉值。

### 2.3 双重介质模型耦合关系

2 种不同介质模型下沉耦合计算时, 根据概率积分法的理论, 需要界定 2 个关键的问题: 1) 极大值的选取, 2) 2 种模型结合边界选取。

地表移动极大值计算方法是基于均匀采厚任意形状地下开采概率积分法理论建立起来的一种计算方法, 对于本文所建立的基岩面上的不均匀下沉空间地表极大移动变形值的计算, 只需将计算式中  $W_0$  替换为  $Z$ , 所采用的参数为松散层内的移动变形参数; 而积分范围(模型结合边界)为开采造成的基岩面下沉空间。

$$\text{即: } W_0 = Z = \begin{cases} Z_1 & \text{简支梁弯曲} \\ Z_2 & \text{全部垮落下沉} \\ Z_3 & \text{砌体梁下沉} \end{cases}$$

$$\text{则 } W(x) = \frac{Z}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{r'} x \right) + 1 \right] \quad (13)$$

式中:  $W(x)$  为地表下沉量;  $Z$  为岩层下沉量;  $r'$  为松散层影响半径。

以上给出了双重介质模型地表下沉的计算模型。对于倾斜、曲率、水平移动、水平变形可采用以下计算:

$$i(x) = \frac{dW(x)}{dx}; \quad k(x) = \frac{dW^2(x)}{dx};$$

$$U(x) = Bi(x); \quad \varepsilon(x) = Bk(x)$$

式中:  $i(x)$ ,  $k(x)$ ,  $U(x)$ ,  $\varepsilon(x)$  分别为倾斜、曲率、水平移动、水平变形;  $B$  为水平移动系数。

基于以上理论、方法及计算模型, 按照结构化和模块化的设计思想, 在 Matlab 的基础上进行开发完成预计分析系统。其整体思路是通过基本数据的输入为开采沉陷预计准备基础数据, 根据建立的微分方程和边界条件, 判断计算采空区填充情况和上覆岩层破坏情况, 再通过断裂带高度计算、岩层的移动变形计算及地表移动变形计算, 实现预计结果

的统计分析，其结果可以实现图形输出。

3 工程实例

为了验证双重介质模型的可靠性，选择了鲍店煤矿 1312 工作面实测地表移动资料与模型的分析计算结果进行比较。

3.1 观测站概况

1312 工作面开采 3 层煤，采用综采放顶煤开采，全部垮落法管理顶板，实际回采率为 91%，推进速度约为 5 m/d。工作面走向长 845 m，倾向长 245 m，煤层厚度为 8.36~9.50 m，煤层倾角平均 8°。根据 1312 工作面附近 L<sub>1</sub> 和 L<sub>2</sub> 钻孔资料可知，煤层上覆岩层为粉砂岩、中细砂岩、泥岩、中细砂岩。底板为泥岩和粉砂岩。松散层厚度  $h_0=211$  m；采深  $H=349$  m；采厚  $m=8.79$  m；基岩边界角  $\delta_0=70^\circ$ 。

根据工作面附近 L<sub>1</sub> 孔和 L<sub>2</sub> 孔的观测结果，开采引起的裂隙带高度平均为 90.1 m。所以冒落裂缝带之上的中砂岩(厚度 10.37 m)对整个上覆岩层和地表移动有着直接的影响，起着关键层控制作用。岩梁的弹性模量  $E=10.5$  GPa；泊松比  $\nu=0.20$ ；冒落裂缝带地基系数： $k=110$  GPa/m。

3.2 观测成果与双介质模型计算结果的比较

1312 工作面地表下沉观测成果与模型计算成果对比见图 2。

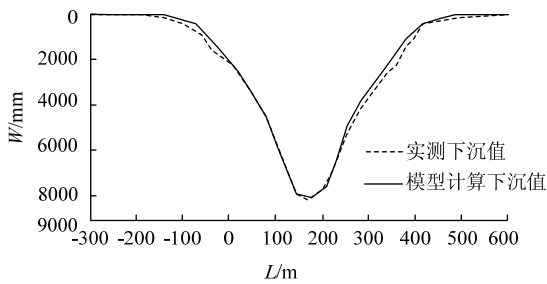


图 2 下沉曲线对比图

Fig.2 Predicted subsidence compared with field data

从图 3 中可看出：1) 模型计算的下沉曲线形态(下沉规律)与实测基本吻合；2) 最大下沉值及位置基本吻合；3) 模型计算的曲线相对实测更为对称，主要原因是，基本假设中将上覆基岩和松散层看成各层均质及各向同性体，与实际情况有所差异。

3.3 地表移动预计参数及角量参数比较

根据 2000 年 7 月《兖州矿区地表移动参数使用手册》以及鲍店矿区各综放工作面的预计参数，得出该工作面的地表沉陷预计参数，参数对比见表 1。

表 1 概率积分法参数对比表

Table 1 Parameter comparison table of probability integration method

数值	下沉系数	主要影响角正切	水平移动系数	左侧拐点偏移距	右侧拐点偏移距
计算值	0.91	2.1	0.32	38	35
实测值	0.92	2.3	0.30	44	32

预计参数的主要差异来自主要影响角正切，这是因为在岩层下沉的计算过程中，开采边界的判断选取以及煤帮上部岩层在移动变形过程中存在附加应力拱。

移动角量参数对比见表 2。

表 2 角量参数对比表

Table 2 Comparative table of angle parameters

数值	计算结果		实测结果	
	综合边界角	综合移动角	综合边界角	综合移动角
上山方向	65.7°	72.5°	54.8°	77.3°
下山方向	62.7°	71.1°	53.1°	74.4°

从表中可见，角量参数中在综合边界角上存在明显差异，原因同上。

4 结 论

1) 岩层移动破坏最终可归结为 4 种状态：① 顶板垮落，但垮落岩石尚未充满采空区，形成两边位于弹性基础上中间悬空的简支梁；② 顶板垮落后，垮落岩石已充满采空区，形成两边位于弹性基础上，但中间受到垮落岩石支撑；③ 岩层全部断裂，但关键层破断后在垮落区域上部形成稳定的砌体梁结构；④ 岩层全部破碎垮落。

2) 地表松散层的移动变形规律符合随机介质模型移动和变形规律，即概率积分法适用于松散层的预计。

3) 基于岩层不同的移动破坏状态，对地表下沉产生了不同的影响，分阶段建立了岩体移动模型，完成了各模型的求解，得到了岩层移动计算式和岩层破坏判断式。

4) 建立了连续介质和非连续介质结合的双重介质模型。该模型可以判断岩石的破坏状态、采空区填充情况及计算岩体的破裂高度，同时计算出岩层及地表的移动变形值。

5) 开发了以双介质模型为基础的岩层及地表移动破坏可视化计算软件。该软件可进行岩层及地表的动态移动变形计算、断裂带高度计算等，并可以用图形输出。

6) 计算结果与鲍店矿 1312 观测站实测结果的比较表明: 采用双重介质模型计算的最大下沉值及位置、地表移动参数、断裂带高度与实测符合度较好, 误差小于 10%, 模型可靠性强, 能够满足工程实际的需要。

#### 参考文献:

- [1] 黄志全. 土力学[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 2011.
- [2] 王悦汉, 邓喀中, 吴侃, 等. 采动岩体动态力学模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(3): 352-357.  
WANG Yue-han, DENG Ka-zhong, WU Kan, et al. On the dynamic mechanics model of mining subsidence[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(3): 352-357.
- [3] 钱鸣高, 何富连, 王作棠, 等. 再论采场矿山压力理论[J]. 中国矿业大学学报, 1994, 23(3): 1-9.  
QIAN Ming-gao, HE Fu-lian, WANG Zuo-tang, et al. A further discussion on the theory of the strata behaviors in longwall mining[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1994, 23(3): 1-9.
- [4] 方新秋, 黄汉富, 金桃, 等. 厚表土薄基岩煤层开采覆岩运动规律[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(1): 2700-2706.  
FANG Xin-qiu, HUANG Han-fu, JIN Tao, et al. Movement rules of overlying strata around longwall mining in the bedrock with thick surface soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(1): 2700-2706.
- [5] 钱鸣高, 缪协兴, 何富连. 采场“砌体梁”结构的关键块分析[J]. 煤炭学报, 1994, 19(6): 557-563.  
QIAN Ming-gao, MIAO Xie-xing, HE Fu-lian. Analysis of key block in the structure of voussoir beam in longwall mining[J]. Journal of China Coal Society, 1994, 19(6): 557-563.
- [6] 钱鸣高, 缪协兴, 许家林. 岩层控制中的关键层理论研究[J]. 煤炭学报, 1996, 21(3): 225-230.  
QIAN Ming-gao, MIAO Xie-xing, XU Jia-lin. Theoretical study of key stratum in ground control [J]. Journal of China Coal Society, 1996, 21(3): 225-230.
- [7] 许家林. 岩层移动与控制的关键层理论及其应用[D]. 徐州: 中国矿业大学矿业工程学院, 1999.
- [8] 吴侃, 靳建明, 戴仔强. 概率积分法预计下沉量的改进[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2003, 22(1): 19-22.  
WU Kan, JING Jian-ming, DAI Zi-qiang. Improvement on probability integral method prediction come down quantity[J]. Journal of Liaoning Technical University, 2003, 22(1): 19-22.
- [9] 查剑锋, 郭广礼, 赵海涛, 等. 概率积分法修正体系现状及发展展望[J]. 金属矿山, 2008(1): 15-18.  
ZHA Jian-feng, GUO Guang-li, ZHAO Hai-tao, et al. Present situation and prospect of correction system for probability integral method[J]. Metal Mine, 2008(1): 15-18.
- [10] 黄庆享, 张沛. 厚砂土层下顶板关键块上的动态载荷传递规律[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(24): 4179-4182.  
HUANG Qing-xiang, ZHANG Pei. Study on dynamic load distribution on key roof blocks of under thick sandy soil stratum[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(24): 4179-4182.
- [11] 王金庄, 邢安仕, 吴立新. 矿山开采沉陷及其防治[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1995.
- [12] 邓喀中, 张冬至, 张周权. 深部开采条件下地表沉陷预测及控制探讨[J]. 中国矿业大学学报, 2000, 29(1): 52-55.  
DENG Ka-zhong, ZHANG Dong-zhi, ZHANG Zhou-quan. Study on prediction and control of surface subsidence in deep mining[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2000, 29(1): 52-55.
- [13] 吴侃, 葛家新, 王玲丁, 等. 开采沉陷预计一体化方法[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1998.
- [14] 王悦汉, 邓喀中, 张冬至, 等. 重复采动条件下覆岩下沉特性的研究[J]. 煤炭学报, 1998, 23(5): 470-475.  
WANG Yue-han, DENG Ka-zhong, ZHANG Dong-zhi, et al. The study on the character of strata subsidence during repeat mining[J]. Journal of China Coal Society, 1998, 23(5): 470-475.
- [15] 何国清, 杨伦. 矿山开采沉陷学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1991.